

PACS numbers: 65.80.Ck, 72.15.Jf, 72.20.Pa, 72.80.Vp, 81.05.ue
DOI: 10.3367/UFNr.0182.201211j.1229

Аномальные термоэлектрические и термомагнитные свойства графена

А.А. Варламов, А.В. Кавокин,
И.А. Лукьянчук, С.Г. Шарапов

1. Введение

В настоящей статье представлены результаты недавних исследований некоторых аномалий термоэлектрических и термомагнитных свойств графена. Так, в разделе 3 показано, что наличие щели в дираковском спектре (возможность существования которой в определённых условиях активно обсуждается в литературе) при приближении химического потенциала к её краю приводит к появлению характерного пика в термоэдс. Высота этого пика может на порядок превосходить и без того большую величину термоэдс графена. Обнаруженный гигантский эффект связан с возникновением при приближении химического потенциала к краю щели нового канала рассеяния квазичастиц на примесях со временем релаксации, существенно зависящим от энергии. Рассмотрение, основанное на формализме Кубо, воспроизводит известные результаты для бесщелевого графена, однако демонстрирует неприменимость простой формулы Мотта в обсуждаемом случае.

В разделе 4 обсуждается специфика квантовых осцилляций коэффициента Нернста (КН), имеющих место в графене и графите при приложении достаточно сильных магнитных полей. Показано, как по характеру подобных осцилляций можно судить о характере спектра квазичастиц в образце.

2. Из истории термоэлектричества

Контроль тепловых потоков и минимизация соответствующих потерь являются важными факторами при проектировании современных элементов нанoeлектроники, в том числе основанной на применении графена [1]. Эксперименты показывают [2], что термоэлектрический эффект является ответственным за изменение температуры в области контактов вплоть до 30 % её величины и, таким образом, может играть существенную роль в охлаждении контактов. Измеряемая термоэдс графена достигает при комнатных температурах величины $k_B/e \sim 100$ мкВ K^{-1} (здесь k_B — постоянная Больцмана, $-e < 0$ — заряд электрона).

Изучение термоэлектрических и термомагнитных явлений имеет двухвековую историю. Так, термоэлектри-

ческий эффект, заключающийся в возникновении электрического тока в цепи, состоящей из двух разных металлов, в которых поддерживаются различные температуры, был обнаружен в 1821 г. эстонско-немецким учёным Томасом Йоханом Зеебеком. Количественно эффект Зеебека характеризуется величиной дифференциальной термоэдс (коэффициент Зеебека) — возникающей в неоднородно нагретом проводнике термоэлектродвижущей силой, отнесённой к соответствующей разности температур:

$$S_{xx} = - \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{E_x}{\nabla_x T}.$$

Обычно термоэдс металлов невелика (около 10^{-8} В K^{-1}), однако в легированных полупроводниках и полуметаллах эта величина намного больше.

Более чем через столетие [3] англичанин Невилл Мотт нашёл важное соотношение между дифференциальной термоэдс и логарифмической производной продольной электрической проводимости металла $\sigma_{xx}(\mu, T)$:

$$S_{xx}(\mu, T) = - \frac{\pi^2}{3e} k_B T \frac{d}{d\mu} [\ln \sigma_{xx}(\mu, T = 0)], \quad (1)$$

где μ — химический потенциал носителей заряда, T — температура. Сегодня эта формула является базовой при анализе экспериментов, связанных с термоэлектричеством, однако известны многие аномальные ситуации, в которых поведение термоэдс не описывается формулой Мотта. Это и возрастание термоэдс металла при температурах, близких к температуре Кондо, и её аномалии при электронных топологических переходах, осцилляции в сильных магнитных полях. Одной из причин несостоятельности формулы Мотта является наличие, обусловленное теми или иными причинами, существенной зависимости времени релаксации носителей от энергии.

Среди множества известных термомагнитных явлений наиболее часто обсуждаются эффекты Нернста и Нернста–Эттингсгаузена, обнаруженные австрийскими учёными Альбертом фон Эттингсгаузенем и Вальтером Нернстом в 1886 г. Эффект Нернста в металле [4], являющийся тепловым аналогом эффекта Холла, заключается в возникновении электрического поля E_y , нормального ко взаимно перпендикулярным магнитному полю H ($|z$) и градиенту температуры $\nabla_x T$. При этом предполагается, что все электрические цепи разорваны: $J_x = J_y = 0$, а тепловой поток вдоль оси y отсутствует (условия адиабатичности). Количественно эффект характеризуется коэффициентом Нернста:

$$v = \frac{E_y}{(-\nabla_x T) H}.$$

КН может изменяться, в зависимости от материала, в пределах нескольких порядков, от 7 мВ K^{-1} Tl^{-1} в случае висмута и вплоть до 10^{-5} мВ K^{-1} Tl^{-1} в "хороших" металлах [5].

Эффект Нернста–Эттингсгаузена является иной экспериментальной реализацией того же эффекта Нернста: через образец, помещённый в магнитное поле (направленное по оси z), пропускается электрический ток (вдоль оси y). При этом одновременно вдоль оси x возникает градиент температуры. Ниже мы не будем различать эти эффекты.

Микроскопическая природа эффекта Нернста оставалась неясной вплоть до 1948 г. — до тех пор пока

А.А. Варламов. Национальный исследовательский технологический университет "Московский институт стали и сплавов", РФ;
University of Rome "Tor Vergata", Italy
E-mail: varlamov@ing.uniroma2.it

А.В. Кавокин. Институт теоретической физики им. Л.Д. Дандау РАН, РФ; University of Southampton, UK,

Санкт-Петербургский государственный университет, РФ

И.А. Лукьянчук. Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, РФ; University of Picardie Jules Verne, France

С.Г. Шарапов. Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины, Украина

Е. Зондхеймер [6] не нашёл, используя кинетическое уравнение, выражение для КН вырожденного электронного газа с примесями, связав КН с производной холловского угла $\theta_H = \sigma_{xy}/\sigma_{xx}$ по энергии:

$$v(T) = -\frac{\pi^2}{3} \frac{cT}{eH_z} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \right) = -\frac{\pi^2 T}{3m} \frac{d\tau(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\mu}, \quad (2)$$

что позволило установить связь между этими двумя эффектами, а также сделало эффект Нернста важным инструментом в исследованиях характера рассеяния носителей заряда в полупроводниках. Здесь m — масса носителя заряда, $\tau(\varepsilon)$ — зависящее от энергии время релаксации.

В рамках теории Зондхеймера коэффициент v оказывается постоянным в слабых полях и убывает как H^{-2} в области достаточно сильных полей, когда циклотронная частота ω_c превышает величину τ^{-1} , обратную времени рассеяния. В 1964 г. Ю.Н. Образцов [7] обратил внимание на важность учёта при обсуждении эффекта Нернста так называемых токов намагниченности (т.е. электрических токов, возникающих вследствие неоднородной намагниченности образца).

В разделах 3 и 4 мы представим результаты двух недавних исследований [8, 9] необычных термоэлектрического и термомагнитного эффектов в такой "горячей" области физики конденсированного состояния, как изучение свойств графена и связанных с ним систем.

3. Термоэлектрический эффект в графене со щелью в спектре

Результаты экспериментов [10–13] по измерению термоэлектрического транспорта в графене в основном можно теоретически объяснить с помощью формулы Мотта. Тем не менее эти эксперименты показали, что формула Мотта (1) даёт результаты, не соответствующие экспериментальным данным, когда при высоких температурах μ оказывается вблизи точки Дирака, особенно в образцах графена с высокой мобильностью [13]. Теоретический анализ [14–16] показывает, что такое несоответствие связано с нарушением условий применимости формулы Мотта, которые имеют вид $T \ll |\mu|$ и/или $T \ll \zeta$ (где ζ — характерный масштаб энергий, при котором проводимость $\sigma_{xx}(\mu, T=0)$ изменяется вблизи поверхности Ферми).

Ниже мы покажем, что термоэдс в графене, имеющая уже достаточно большое значение, может быть ещё увеличена почти на порядок за счёт открытия щели Δ в спектре квазичастичных возбуждений. Это приводит к возникновению нового канала рассеяния квазичастиц, причём время релаксации сильно зависит от энергии, что приводит к возникновению гигантского пика термоэдс при приближении химического потенциала к краю щели. Такая картина очень похожа на хорошо известную аномалию термоэдс вблизи электронного топологического перехода (см. обзор [17]).

Отметим, что эксперименты [18, 19] указывают на наличие щели в спектре квазичастичных возбуждений в графене вблизи дираковской точки, связанное, по-видимому, с влиянием подложки. Для однослойного графена вопрос о наличии щели до конца не изучен. Поэтому полученные нами результаты позволяют предложить измерение термоэдс в качестве чувствительного метода обнаружения щели.

3.1. Рассеяние электронов в графене со щелью

В импульсном представлении гамильтониан графена имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{\sigma} \int_{\text{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}) [\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{p}) - \mu \hat{\tau}_0] \Upsilon_{\sigma}(\mathbf{p}), \quad (3)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}(\mathbf{p}) = \hat{\tau}_+ \phi(\mathbf{p}) + \hat{\tau}_- \phi^*(\mathbf{p}) + \Delta \hat{\tau}_3,$$

$\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_3$ и $\hat{\tau}_{\pm} = (\hat{\tau}_1 \pm i\hat{\tau}_2)/2$ — матрицы Паули, действующие в пространстве подрешёток на спиноры $\Upsilon_{\sigma}(\mathbf{p})$ и $\Upsilon_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}) = (a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}), b_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}))$ с операторами рождения (уничтожения) электронов $a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p}), b_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{p})$ ($a_{\sigma}(\mathbf{p}), b_{\sigma}(\mathbf{p})$), которые соответствуют подрешёткам А и В, σ — спиновый индекс; интегрирование проводится по зоне Бриллюэна (BZ). В рассматриваемом случае отвечающая за дисперсию комплексная функция $\phi(\mathbf{p})$ вблизи двух независимых К-точек зоны Бриллюэна может быть выбрана в виде $\xi \equiv |\phi(\mathbf{p})| = \hbar v_F |\mathbf{p}|$, где v_F — скорость Ферми, а волновой вектор \mathbf{p} отсчитывается от соответствующей К-точки. Наличие щели Δ нарушает эквивалентность подрешёток А и В, а спектр вблизи К-точек принимает вид $E(\mathbf{p}) = \pm(\hbar^2 v_F^2 \mathbf{p}^2 + \Delta^2)^{1/2} - \mu$.

Рассеяние на примесях рассмотрено с помощью техники Абрикосова–Горькова в рамках самосогласованного борновского приближения. При этом потенциал рассеяния выбран таким, чтобы можно было не учитывать рассеяния между разными долинами, тогда как в пределах одной долины он считается постоянным, равным $u(\mathbf{0})$. В результате мы получили следующее выражение для рассеяния на примесях:

$$\Gamma(\varepsilon) = \Gamma_0 \left(\frac{|\varepsilon + \mu|}{|\mu|} + \frac{\Delta^2}{|\varepsilon + \mu||\mu|} \right) \theta((\varepsilon + \mu)^2 - \Delta^2), \quad (4)$$

где $\Gamma_0 = 2\hbar/\tau_0$, τ_0 — характерное время релаксации, $\tau_0^{-1} = n_i |u(\mathbf{0})|^2 |\mu| / (4\hbar^3 v_F^2)$ [20], n_i — концентрация носителей; θ — функция Хевисайда. В представленных ниже результатах мы используем значение $\Gamma_0 = 20$ К, не учитывая его концентрационной зависимости. Из уравнения (4) видно, что при $(\varepsilon + \mu)^2 < \Delta^2$ рассеяние отсутствует. Тем не менее следует принять во внимание, что некоторые неучтённые в модели процессы приводят к конечному времени релаксации ниже края щели. При численных расчётах это учитывается добавлением к $\Gamma(\varepsilon)$ малого остаточного рассеяния γ_0 . Окончательные результаты практически не зависят от величины γ_0 .

3.2. Термоэдс в графене со щелью в спектре

С помощью формулы Кубо можно получить следующие выражения для электрической проводимости и термоэлектрического коэффициента:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \beta_{xx} \end{array} \right\} = \frac{e^2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon \mathcal{A}(\varepsilon, \Gamma(\varepsilon), \Delta)}{2T \cosh^2[\varepsilon/(2T)]} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \varepsilon/eT \end{array} \right\}, \quad (5)$$

где при ненулевой щели Δ функция \mathcal{A} имеет вид [21, 22]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varepsilon, \Gamma(\varepsilon), \Delta) &= \frac{1}{2\pi^2} \left[1 + \frac{(\mu + \varepsilon)^2 - \Delta^2 + \Gamma^2(\varepsilon)}{2|\mu + \varepsilon| \Gamma(\varepsilon)} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\Delta^2 + \Gamma^2(\varepsilon) - (\mu + \varepsilon)^2}{2|\mu + \varepsilon| \Gamma(\varepsilon)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

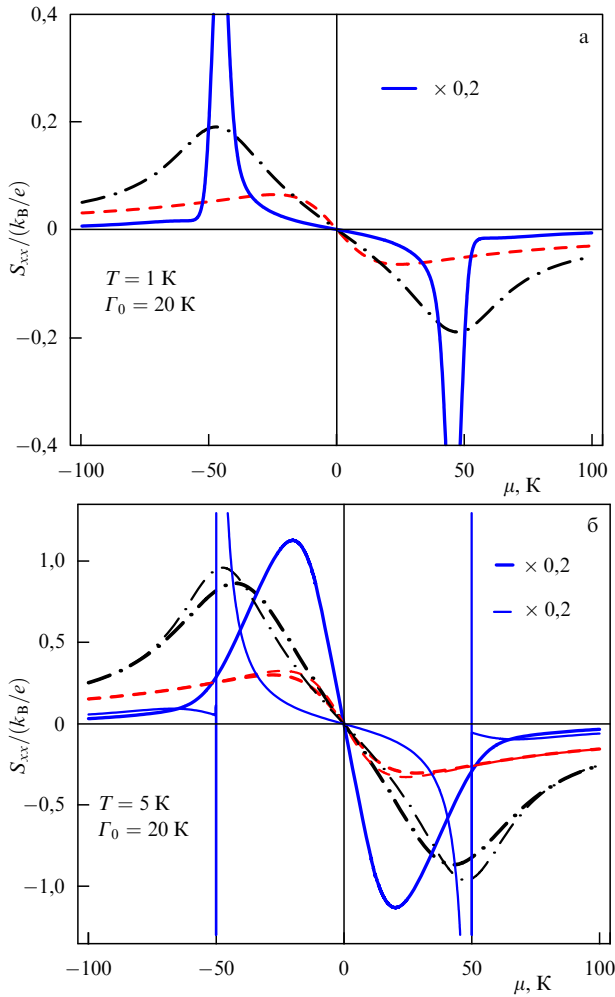


Рис. 1. (См. в цвете онлайн.) Термоэдс S_{xx} в единицах k_B/e как функция химического потенциала μ при (а) $T = 1$ К и (б) $T = 5$ К. Штриховая кривая соответствует независимому от энергии $\Gamma = \Gamma_0$ и $\Delta = 0$, штрихпунктирная жирная кривая — $\Gamma = \Gamma_0$ и $\Delta = 50$ К, сплошная жирная кривая — зависящему от энергии $\Gamma(\varepsilon)$ и $\Delta = 50$ К. Зависимости, представленные сплошными кривыми, умножены на 0,2. Тонкие кривые на рис. б получены с помощью формулы Мотта.

При $\Delta = 0$ уравнение (6) упрощается до вида, рассмотренного в работах [14, 16]. В этом случае, положив $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma_0 = \text{const}$, при условии $|\mu| \gg T, \Gamma_0$ находим $\sigma_{xx} = e^2|\mu|/(2\pi\hbar\Gamma_0)$ и $\beta_{xx} = \pi e T \text{sgn } \mu / (6\hbar\Gamma_0)$, в согласии с работой [22]. Тогда термоэдс $S_{xx} = -\beta_{xx}/\sigma_{xx}$ оказывается такой же, как и в обычных металлах, $S_{xx} = -(\pi^2/3e) T/\mu$, и совпадает с величиной, которая непосредственно следует из формулы Мотта (1).

Зависимость $S_{xx}(\mu)$ при $T = 1$ К и $T = 5$ К показана на рис. 1. Жирные штриховые кривые соответствуют случаю $\Delta = 0, \Gamma(\varepsilon) = \Gamma_0$, когда $\sigma_{xx}(\mu) \propto |\mu|$ и $S_{xx}(\mu) \propto 1/\mu$ при больших $|\mu|$. Выражения (5) и (6) также позволяют воспроизвести случай с ненулевой щелью и независимым от энергии $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma_0$ [21, 22]. Соответствующие зависимости представлены жирными штрихпунктирными кривыми, вычисленными при $\Delta = 50$ К.

Наш основной результат, показанный жирными сплошными кривыми, получен для зависящего от энергии $\Gamma(\varepsilon)$, которое задаётся формулой (4), при $\Delta = 50$ К. Подчеркнём, что соответствующие значения $S_{xx}(\mu)$ были уменьшены в пять раз, для того чтобы показать их на фоне других кривых. Это означает, что пиковые значения

термоэдс по крайней мере в пять раз больше, чем величины термоэдс, полученные в случае $\Gamma(\varepsilon) = \text{const}$.

Существенного усиления термоэдс в случае зависящего от энергии $\Gamma(\varepsilon)$ можно ожидать даже исходя из формулы Мотта (1). Тем не менее формула (1) не может быть использована для количественного описания. Действительно, тонкие кривые на рис. 1б получены с использованием электрической проводимости при нулевой температуре $\sigma(\mu, T = 0) = (2e^2/\hbar) \mathcal{A}(0, \Gamma(0), \Delta)$ и формулы Мотта (1), тогда как жирные кривые — с использованием формулы Кубо как для σ_{xx} , так и для β_{xx} . Видно, что в случае $\Delta = 0$ и $\Gamma(\varepsilon) = \text{const}$ согласие между формулами Кубо и Мотта является очень хорошим, а при $T = 1$ К становится идеальным, поэтому результаты для формулы Мотта на рис. 1а не приведены. В то же время из рис. 1б видно, что в случае конечного значения Δ и $\Gamma(\varepsilon) = \text{const}$ расхождение результатов, полученных с помощью формул Кубо и Мотта, уже имеется, особенно вблизи $|\mu| = \Delta$. Наконец, в случае зависящего от энергии $\Gamma(\varepsilon)$ формула Мотта неприменима.

Особенность термоэдс заключается в её чувствительности к производной обратного времени рассеяния. В связи с этим наличие тета-функции в (4) сильно влияет на зависимость $S(\mu)$ вблизи $|\mu| \approx \Delta$. Здесь стоит напомнить ещё раз об очевидной аналогии между транспортом в графене со щелью и транспортом в металле вблизи электронного топологического перехода. Действительно, вблизи критического значения химического потенциала $\mu = \mu_c$, где изменяется связность ферми-поверхности, время релаксации квазичастиц становится существенно зависящим от энергии, что приводит к появлению хорошо известных изломов проводимости и пиков термоэдс [17].

4. Гигантские осцилляции коэффициента Нернста в графене

Гигантские осцилляции КН впервые были обнаружены экспериментально в 1959 г. Бергерном с соавторами [25] на образцах цинка. Авторы работы [25] объяснили это явление пересечением уровнями Ландау химического потенциала. Как и в случае осцилляций де Гааза–ван Альфена намагниченности и Шубникова–де Гааза проводимости, поля, соответствующие осцилляциям КН, определяются условием Лифшица–Онсагера [23]:

$$S(\mu) = (k + \gamma_\sigma) 2\pi\hbar \frac{eH_{k\sigma}}{c}, \tag{7}$$

где $S(\mu)$ — площадь сечения ферми-поверхности, соответствующего орбитальному движению электронов при $p_z = 0$, k — целое число, $\gamma_\sigma = \gamma + 1/2 (m^*/m) \sigma$ с $\sigma = \pm 1$, $m^* = (1/2\pi) dS/d\mu$ — циклотронная масса электрона [23].

Совсем недавно эффект Нернста в графене был изучен экспериментально [11, 12], и соответствующие результаты были проанализированы в рамках стандартной теории [24]. Неожиданно обнаружилось, что при осцилляциях КН меняет знак в графене при полях, удовлетворяющих условию (7), в то время как в цинке [25] и висмуте [26] при соответствующих полях наблюдаются максимумы. Такое необычное поведение осцилляций $\nu(H)$ в графене не воспроизводится в трёхмерном графите.

Ещё одним замечательным свойством квантовых осцилляций оказывается зависимость их характера от

типа спектра носителей, а именно от значения топологического параметра γ [27, 28]: $\gamma = 1/2$ для нормальных носителей (NC) с параболическим двумерным (2D) спектром и линейным квантованием Ландау:

$$\text{NC: } \varepsilon(p_{\perp}) = \frac{p_{\perp}^2}{2m_{\perp}}, \quad \varepsilon_k = 2\mu_{\text{B}} H \frac{m}{m_{\perp}} \left(k + \frac{1}{2}\right),$$

и $\gamma = 0$ для дираковских фермионов (DF), имеющих линейный спектр с двумя ветвями и корневой зависимостью энергии уровней Ландау $\sim k^{1/2}$ в магнитном поле:

$$\text{DF: } \varepsilon(p_{\perp}) = \pm v|p_{\perp}|, \quad \varepsilon_k = \pm(4mv_{\text{F}}^2\mu_{\text{B}}Hk)^{1/2},$$

где p_{\perp} и m_{\perp} — импульс и эффективная масса в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, m — масса свободного электрона, v_{F} — его фермиевская скорость, $\mu_{\text{B}} = e/2mc$ — магнетон Бора.

Ниже мы воспользуемся простым термодинамическим подходом к описанию эффекта Нернста, который позволит связать соответствующие осцилляции с осцилляциями де Гааза–ван Альфена намагниченности. Для обоих вкладов в КН — теплового (Зондхеймер) и соответствующего токам намагниченности (Образцов) — найдены точные выражения как для параболического, так и для дираковского спектров. В случае последнего наши результаты прекрасно воспроизводят осцилляции КН, обнаруженные в экспериментах на графене [11, 12]. Замечательно, что их амплитуда, в отличие от таковой в случае параболического спектра, при увеличении фермиевской энергии (напряжение на затворе) убывает, а не возрастает. Форма осцилляций определяется температурной производной осцилляций де Гааза–ван Альфена.

4.1. Термодинамическое описание эффекта Нернста

Как было сказано в разделе 2, КН измеряется в отсутствие токов в системе. Поэтому электрохимический потенциал вдоль градиента температуры можно считать постоянным, $\mu + e\varphi = \text{const}$ (здесь φ — электростатический потенциал). Следовательно, влияние неоднородности температуры в образце определяется появлением вдоль её градиента эффективного электрического поля $E_x = \nabla_x \mu/e$. Таким образом, задача сводится к классической проблеме Холла, что позволяет легко найти тепловой вклад в КН:

$$v^{\text{term}} = \frac{\sigma_{xx}}{e^2nc} \frac{d\mu}{dT}, \quad (8)$$

где n — концентрация носителей. Эта простая формула воспроизводит результат Зондхеймера для вырожденного электронного газа, флуктуационный вклад в КН в сверхпроводниках при температурах выше T_c и т.д. [30].

Второй вклад в КН, возникающий вследствие пространственной зависимости намагниченности в образце [7], может быть найден из закона Ампера. Плотность тока намагниченности $\mathbf{j}^{\text{mag}} = [c/(4\pi)] \nabla \times \mathbf{B}$, где $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$, \mathbf{H} — пространственно однородное магнитное поле, \mathbf{M} — намагниченность, которая может зависеть от температуры, а следовательно, и от координат. Связанная с намагниченностью плотность тока $\mathbf{j}_y^{\text{mag}} = -c(dM/dT) \nabla_x T$, соответствующий вклад в нернстовское электрическое поле оказывается равным $E_y^{\text{mag}} = \rho_{yy} j_y^{\text{mag}}$ с ρ_{yy} в качестве диагональной компоненты

тензора удельного сопротивления ($\rho_{yy} = \rho_{xx}$). В результате вклад от токов намагниченности в КН выражается как

$$v^{\text{mag}} = \frac{c\rho_{yy}}{H} \left(\frac{dM}{dT}\right). \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) позволяют понять физическую природу осцилляций КН в квантующих магнитных полях. В частности, из них видно, что КН зависит от диагональных компонент тензоров удельных проводимости и сопротивления, осцилляции которых в зависимости от магнитного поля являются не чем иным, как эффектом Шубникова–де Гааза. Однако в графене гигантские осцилляции КН наблюдаются и в режиме, когда эффект Шубникова–де Гааза мал (при $H < 3$ Тл) [12], поэтому гигантские осцилляции КН в последнем случае следует считать обусловленными другими множителями в выражениях (8) и (9), а именно температурными производными химического потенциала $d\mu/dT$ и намагниченности dM/dT . Замечательно, что для получения явных выражений этих величин нам не понадобится никаких дополнительных сведений о транспортных свойствах системы, указанные производные могут быть выражены в терминах термодинамического потенциала Ω :

$$\frac{d\mu}{dT} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial T \partial \mu} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2}\right)^{-1}, \quad \frac{dM}{dT} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial T \partial H}. \quad (10)$$

Выражение для осциллирующей части термодинамического потенциала Ω в случае параболического спектра, полученное Шампелем и Минеевым [31] (см. также [32]), позднее было обобщено для произвольного спектра $\varepsilon_{\perp}(p_{\perp})$ Лукьянчуком [33] (см. также [34]). В 2D-случае

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= \frac{m^*}{2\pi\hbar^2} \frac{\hbar^2 \omega_c^2}{\pi^2} \frac{1}{2} \sum_{l=1, \sigma=\pm 1}^{\infty} \frac{\psi(\lambda l)}{l^2} \exp\left(-\frac{2\pi l \Gamma}{\hbar \omega_c}\right) \times \\ &\times \cos\left[2\pi l \left(\frac{c}{e\hbar} \frac{S(\mu)}{2\pi H} - \gamma_{\sigma}\right)\right], \end{aligned} \quad (11)$$

с $\psi(\lambda l) = \lambda l / \sinh \lambda l$. Здесь $\lambda = 2\pi^2 T / (\hbar \omega_c)$, Γ — дингловское уширение уровня Ландау. С целью применения результатов как к параболическому, так и к дираковскому спектрам мы представляем выражение (11) в наиболее общей форме, используя параметры S , m^* , ω_c и γ_{σ} . Для NC $S = 2\pi m_{\perp} \mu$, $m^* = m_{\perp}$, $\omega_c = eH/m_{\perp} c$, $\gamma_{\sigma} = 1/2 + (1/2)(m_{\perp}/m)\sigma$; для DF $S = \pi \mu^2 / v^2$, $m^* = \mu / v^2$, $\omega_c = eHv^2 / (\mu c)$, $\gamma_{\sigma} = 1/2 [\mu / (mv^2)] \sigma$. В результате осциллирующие части намагниченности и химического потенциала могут быть выражены с учётом соотношения (10) в виде

$$\frac{d\tilde{\mu}}{dT} = -\frac{\text{Im} \Xi^{\{1\}}}{1 + 2 \text{Re} \Xi^{\{0\}}}, \quad \frac{d\tilde{M}}{dT} = \frac{n}{H} \frac{d\tilde{\mu}}{dT}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi^{\{\alpha\}} &= \frac{1}{2} \sum_{l=1, \sigma=\pm 1}^{\infty} \psi^{(\alpha)}(\lambda l) \exp\left(-\frac{2\pi l \Gamma}{\hbar \omega_c}\right) \times \\ &\times \cos\left[2\pi l \left(\frac{c}{e\hbar} \frac{S(\mu)}{2\pi H} - \gamma_{\sigma}\right)\right], \end{aligned} \quad (13)$$

$\psi^{(\alpha)}(x)$ — производная порядка $\alpha = 0, 1$ функции ψ . Из выражений (9) и (12) можно увидеть, что КН осциллирует пропорционально температурной производной намагниченности. Этот факт устанавливает важную универсальную, независимую от размерности и типа носителей, связь между осцилляциями КН и эффектом де Гааза — ван Альфена.

КН удобно представить в виде

$$v = v^{\text{term}} + v^{\text{mag}} = v_0(H) + \tilde{v}(H), \quad (14)$$

где $v_0(H)$ и $\tilde{v}(H)$ — соответственно фоновая и осциллирующая части. Фоновая часть может быть найдена в приближении теории Друде [30],

$$v_0(H) = \frac{\pi^2 \tau}{6m^* c} \left(\frac{T}{\varepsilon_F} \right) \frac{1}{1 + (\omega_c \tau)^2}. \quad (15)$$

Учёт токов намагниченности здесь приводит к появлению поправки порядка $(\varepsilon_F \tau)^{-2}$ по отношению к результату Зондхеймера (15).

Осциллирующая часть КН может быть представлена с учётом выражений (8), (9) и (12) как

$$\tilde{v}(H) = -2\pi\kappa(H) \frac{\text{Im} \Xi^{\{1\}}}{1 + 2 \text{Re} \Xi^{\{0\}}}, \quad (16)$$

где

$$\kappa(H) = \frac{\sigma_{xx}(H)}{e^2 n c} + \frac{c n \rho_{xx}(H)}{H^2}. \quad (17)$$

Выражение (16) описывает осцилляции КН в наиболее общем виде, справедливом для любого типа спектра носителей $\varepsilon_{\perp}(p_{\perp})$.

4.2. Форма осцилляций и её зависимость от типа носителей

Проанализируем выражение (16) в пределе низких температур $2\pi^2 T < \hbar\omega_c$. При этом в (11) параметр $\lambda \ll 1$, следовательно, $\psi(\lambda l) \approx 1 - (1/6)\lambda^2 l^2$. Для $m^* < 0,02m$ и $H = 10$ Тл (типичные значения в экспериментах на графене) это требование означает, что $T < 10$ К. Поскольку $m^* \ll m$, мы можем пренебречь зеемановским расщеплением, приняв $\gamma_{\sigma} = 0$ для НС и $\gamma_{\sigma} = 1/2$ для ДФ. Ряды $\Xi^{\{0\}}$ и $\Xi^{\{1\}}$ в выражении (16) в этом случае могут быть просуммированы аналитически:

$$\tilde{v}^{(2D)}(\mu, H) = \frac{2\pi^3}{3} \frac{T}{\hbar\omega_c} \kappa(H) \times \frac{\sin 2\pi \{ [c/(e\hbar)] [S(\mu)/(2\pi H)] - \gamma \}}{\cosh [2\pi\Gamma/(\hbar\omega_c)] - \cos 2\pi \{ [c/(e\hbar)] [S(\mu)/(2\pi H)] - \gamma \}}. \quad (18)$$

В экспериментах по измерению КН в графене обычно число частиц n фиксировано, поэтому имеет место соотношение [31]

$$n = - \left(\frac{\partial \Omega(\mu)}{\partial \mu} \right)_{H, T} = 2 \frac{S(\mu)}{(2\pi\hbar)^2} - \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}(\mu)}{\partial \mu} \right)_{H, T} = \text{const} \quad (19)$$

(мы принимаем объём $V = 1$). Это уравнение неявно определяет зависимость химического потенциала μ от H, T при заданном n . Заметим, что, согласно соотношению (19), химический потенциал μ является функцией магнитного поля H . Соответствующее выражение для

$S(\mu)$ имеет вид

$$\frac{c}{e\hbar} \frac{S(\mu)}{2H} = \pi^2 \frac{\hbar c}{e} \frac{n}{H} - \arctan \frac{\sin 2\pi [\pi(\hbar c/e)n/H - \gamma]}{\exp(2\pi\Gamma/\hbar\omega_c) + \cos 2\pi [\pi(\hbar c/e)n/H - \gamma]}. \quad (20)$$

Соотношение (20) даёт нам искомую зависимость $\mu(n, H)$. Подставляя (20) в уравнение (18), после довольно трудоёмких вычислений можно найти осциллирующую часть КН в явном виде:

$$\tilde{v}^{(2D)}(n, H) = \frac{2\pi^3}{3} \frac{T}{\hbar\omega_c} \frac{\kappa(H)}{\sinh(2\pi\Gamma/\hbar\omega_c)} \times \sin 2\pi \left(\pi \frac{\hbar c}{e} \frac{n}{H} - \gamma \right). \quad (21)$$

Как видно, (21) является сильно осциллирующей функцией, обращающейся в нуль при магнитных полях, при

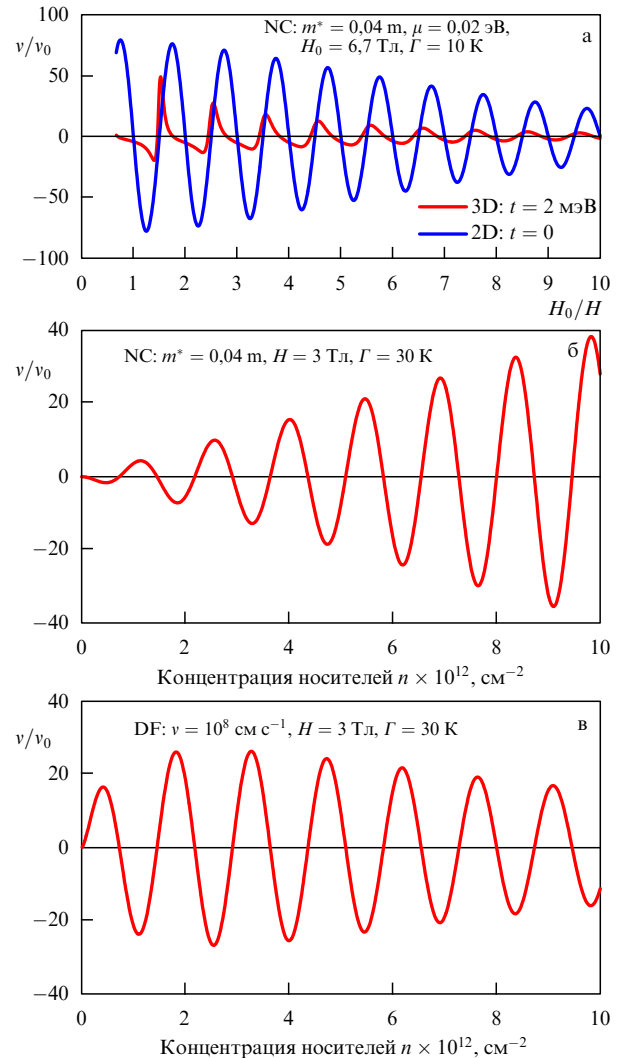


Рис. 2. Осцилляции КН в зависимости от величины, обратной магнитному полю (а), и концентрации для носителей с параболическим спектром (НС) (б) и дираковских фермионов (ДФ) (в). Зависимость $v(H^{-1})$ для ДФ имеет ту же форму, что и зависимость для НС, однако оказывается сдвинутой относительно последней на половину периода. Вертикальными прямыми указаны значения поля, при которых выполняется условие квантования (7).

которых уровни Ландау проходят через химический потенциал ($H = H_{k\sigma}$ определяется условием (7)). Зависящий от магнитного поля множитель $\kappa(H)$, который определяется поведением магнетосопротивления, даётся выражением (17). При $\omega_c\tau \leq 1$, когда осцилляции Шубникова–де Гааза малы, $\kappa(H)$ можно оценить в приближении Друде. В частности, в пределе $\omega_c\tau \sim 1$, предполагая $\Gamma \sim \hbar/2\tau$, можно получить $\kappa(H) \sim \tau/(m^*c)$, и амплитуда осцилляций КН оказывается гигантской по сравнению с фоновой величиной: $\tilde{v}^{(2D)} \sim [\epsilon_F/(\hbar\omega_c)]v_0$. В более сильных полях, $\omega_c\tau > 1$, в режиме квантового эффекта Холла, форма осцилляций КН начинает существенно определяться резкой зависимостью от магнитного поля магнетопроводимости и температуры Дингла. Это обстоятельство может быть учтено подстановкой соответствующих зависимостей в уравнения (16) и (17).

На рисунке 2 представлены осцилляции КН в зависимости от величины, обратной магнитному полю, рассчитанные для двумерной системы с параболическим и дираковским спектрами согласно выражению (21). Представленные результаты, как теоретические, так и экспериментальные, полученные на графене [11, 12], показывают синусоидальный профиль сигнала, амплитуда которого медленно убывает при возрастании концентрации носителей с дираковским спектром. Такое поведение противоречит теоретическим предсказаниям, основанным на классической формуле Мотта, применённой к бoльцмановскому газу электронов [11]. Наоборот, в случае носителей с параболическим спектром наша теория предсказывает возрастание амплитуды осцилляций с увеличением концентрации носителей. Последнее утверждение качественно согласуется с результатами, полученными с использованием формулы Мотта.

Работа выполнена при поддержке проекта SIMTECH (New Century of Superconductivity: Ideas, Materials and Technologies) № 246937 в рамках европейской программы FP7.

Список литературы

1. Geim K L *Science* **324** 1530 (2009)
2. Grosse K L et al. *Nature Nanotechnol.* **6** 287 (2011)
3. Mott N F, Jones H *The Theory of the Properties of Metals and Alloys* 1st ed. (Oxford: Clarendon Press, 1936)
4. Von Ettingshausen A, Nernst W *Ann. Physik* **265** 343 (1886)
5. Behnia K, Méasson M-A, Kopelevich Y *Phys. Rev. Lett.* **98** 076603 (2007)
6. Sondheimer E H *Proc. R. Soc. London A* **193** 484 (1948)
7. Образцов Ю Н *ФТТ* **6** 414 (1964) [Obraztsov Yu N *Sov. Phys. Solid State* **6** 331 (1964)]
8. Sharapov S G, Varlamov A A *Phys. Rev. B* **86** 035430 (2012)
9. Luk'yanchuk I A, Varlamov A A, Kavokin A V *Phys. Rev. Lett.* **107** 016601 (2011)
10. Wei P et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 166808 (2009)
11. Zuev Y M, Chang W, Kim P *Phys. Rev. Lett.* **102** 096807 (2009)
12. Checkelsky J G, Ong N P *Phys. Rev. B* **80** 081413(R) (2009)
13. Wang D, Shi J *Phys. Rev. B* **83** 113403 (2011)
14. Löfwander T, Fogelström M *Phys. Rev. B* **76** 193401 (2007)
15. Hwang E H, Rossi E, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **80** 235415 (2009)
16. Ugarte V, Aji V, Varma C M *Phys. Rev. B* **84** 165429 (2011)
17. Varlamov A A, Egorov V S, Pantsulaya A V *Adv. Phys.* **38** 469 (1989)
18. Zhou S Y et al. *Nature Mater.* **6** 770 (2007)
19. Li G, Luican A, Andrei E Y *Phys. Rev. Lett.* **102** 176804 (2009)
20. Peres N M R, Lopes dos Santos J M B, Stauber T *Phys. Rev. B* **76** 073412 (2007)
21. Gorbar E V et al. *Phys. Rev. B* **66** 045108 (2002)
22. Gusynin V P, Sharapov S G *Phys. Rev. B* **71** 125124 (2005); *Phys. Rev. B* **73** 245411 (2006)
23. Лифшиц И М, Косевич А М *ЖЭТФ* **29** 730 (1955) [Lifshits I M, Kosevich A M *Sov. Phys. JETP* **2** 636 (1956)]
24. Bergman D L, Oganessian V *Phys. Rev. Lett.* **104** 066601 (2010)
25. Bergeron C J, Grenier C G, Reynolds J M *Phys. Rev. Lett.* **2** 40 (1959)
26. Behnia K, Méasson M-A, Kopelevich Y *Phys. Rev. Lett.* **98** 166602 (2007)
27. Фальковский Л А *ЖЭТФ* **49** 609 (1965) [Falkovsky L A *Sov. Phys. JETP* **22** 423 (1966)]
28. Mikitik G P, Sharlai Yu V *Phys. Rev. Lett.* **82** 2147 (1999)
29. Serbyn M N et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 067001 (2009)
30. Varlamov A A, Kavokin A V *Europhys. Lett.* **86** 47007 (2009)
31. Champel T, Mineev V P *Phys. Mag. B* **81** 55 (2001)
32. Bratkovsky A M, Alexandrov A S *Phys. Rev. B* **65** 035418 (2002)
33. Luk'yanchuk I A, Kopelevich Y *Phys. Rev. Lett.* **93** 166402 (2004)
34. Sharapov S G, Gusynin V P, Beck H *Phys. Rev. B* **69** 075104 (2004)